Kısmi Dif. Denk Çözümleri (1)

1) $x=2y-z^2+y^2+1$ yüzeyinin $Q(x_0,-1,1)$ noktasında teğet düz. denk

Yüzeyin normal vektörü $F(x,y,z)=x-2y+z^2-y^2-1=0$ olmak üzere $N=(F_x,F_y,F_z)$ dır. O halde $N=(1,-2-2y,2z)$, $N|_Q=?$, $Q(x_0,-1,1)$ yüzeyin üzerinde old. dan $x_0=2\cdot(-1)-1^2+(-1)^2+1 \Rightarrow x_0=-1$, $Q(-1,-1,1)$ olu $N|_Q=(1,0,2)$ olur. $P(x,y,z)$ teğet düz. üzerinde temsili bir nokta olmak üzere $\langle N|_Q, \overrightarrow{QP}\rangle=0 \Rightarrow \langle(1,0,2),(x+1,y+1,z-1)\rangle=0$

$x+1+2z-2=0 \Rightarrow \boxed{x+2z=1}$ olur

2) $y=2x-1$, düzlem, $y=x^2$ parabolik silindir.

$z=x^2-y^2+1$ parabolik hiperboloid, $x^2-2y+y^2=1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=2$ eliptik silindir, $z^2+2z+y^2-x^2=0 \Rightarrow (z+1)^2+y^2-x^2=1$ tek kanatlı hiperboloid.

3) a) $z=f(x-y)+g(x)$, iki keyfi fonk old. dan ikinci mertebeden k.d.denk elde edilecektir. Bunun için

$z_x=f'(x-y)\cdot 1+g'$, $z_y=f'(x-y)\cdot(-1)$, $z_{xx}=f''(x-y)\cdot 1+g''$, $z_{yy}=f''(x-y)$

$z_{xy}=f''(x-y)\cdot(-1)$, son iki eşitlikten $z_{xy}=-z_{yy} \Rightarrow \boxed{z_{xy}+z_{yy}=0}$

a) $y=x^2-z$ yüzeyinin teğet düzlem ailesinin k.d.denk.

Yüzey üzerinde bir nokta $Q(x_0,y_0,x_0^2-y_0)$ alınsın. Yüzeyin normal vektörü $N=(z_x,z_y,-1) \Rightarrow N=(2x,-1,-1) \Rightarrow N|_Q=(2x_0,-1,-1)$ dir $P(x,y,z)$ teğet düzlem üzerinde temsili bir nokta olmak üzere $\langle N|_Q,\overrightarrow{QP}\rangle=0 \Rightarrow 2x_0(x-x_0)-(y-y_0)-(z-(x_0^2-y_0))=0$

$2x_0x-y-z-2x_0^2+y_0+x_0^2-y_0=0 \Rightarrow 2x_0x-y-z-x_0^2=0$ x'e ve y'ye göre kısmi türev alınırsa $2x_0-z_x=0$, $-1-z_y=0$ olur.

Kısmi dif. denk ya $z_y=-1$, ya da $x_0=\frac{z_x}{2} \Rightarrow 2\cdot\frac{z_x}{2}x-y-z-\left(\frac{z_x}{2}\right)^2=$ şeklinde bulunur.

Ad Soyad:
No:

Kısmi Dif Denk Ara Sınav 24.11.19

1) $x = 2y - z^2 + y^2 + 1$ yüzeyinin $Q(x_0, -1, 1)$ noktasında teğet düzlem denklemini bulunuz.

2) Aşağıdaki ifadelerin üçboyutlu uzayda ne belirttiğini yazınız.
$y = 2x - 1$, $y = x^2$, $z = x^2 - y^2 + 1$, $x^2 - 2y + y^2 = 1$, $x^2 - 2x + y^2 = z^2$
$z^2 + 2z + y^2 - x^2 = 0$

3) a) $z = f(x-y) + g(x)$ yüzey ailesine karşılık gelen k.d.denk bulunuz. (f ve g her mertebeden sürekli türevlenebilen keyfi fonk)
a) $y = x^2 - z$ yüzeyinin teğet düzlem ailesinin kısmi dif. denk. bulunuz.

4) Aşağıdaki k.d.denklemlerinin Lineer, yarı lineer ve hemen hemen lineer olup-olmadıklarını belirtiniz.
a) $(x+y)\,z_x - (y-x)\,z_y = x\sin z$ b) $(z_x - z_y)^2 + y z_x + x z_y = 1 - z$
c) $x z_x z_y + (z+x)^2 z_{xy} + (\sin x)\, z_{xy} + z_y z_{xx} = 0$

5) $x^2 z_x + y^2 z_y = (x+y)z$ denkleminin $\alpha(t) = (2t, t, 1)$ eğrisinden geçen çözümü varsa bulunuz.

6) $(2xyz + x^2\sin x)\,z_y + (x^2 z - y)\,z_x + 2xz^2 = -\sin x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
($u(x,y,z) = x^2 z + y = c$, $v(x,y,z) = \cos x + yz = c_2$)

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

*) $x + y = f\left(\frac{1}{4}z^2 - xz + x^2\right) + g\left(\frac{1}{\sin(2x-z)}\right) + h\left(e^{2x} \cdot e^{-z}\right) + k(x+y)$ ifadesi kaçıncı mertebeden bir kısmi dif denklemin genel çözümü olabilir.

Başarılar N.A.

4) a) $(x+y)z_x-(y-x)z_y=x\sin z$ $\sin z$ old. dan lineer değildir. En yüksek türeve göre lineer old. dan yarı lineerdir. Yarı lineer ve en yüksek türevin (z_x ve z_y) nin katsayılarında z, olmadığından hemen hemen lineerdir.

b) $(z_x-z_y)^2+yz_x+xz_y=1-z \Rightarrow z_x^2-2z_xz_y+z_y^2+yz_x+xz_y=1-z$

Bağımlı değişkenin kareleri geldiğinden lineer değil. En yüksek türevin kareleri veya kendisiyle çarpımı geldiğinden yarı-lineer değil dolayısıyla hemen hemen lineerde değildir.

c) $xz_xz_y+(z+x)^2z_{xy}+(\sin x)z_{xy}+z_yz_{xx}=0$

Bağımlı değişkenler çarpım şeklinde old. için lineer değil. En yüksek türeve göre lineer yani z_{xy} veya z_{xx} kendisiyle çarpımı olmadığından yarı-lineerdir. Ancak en yüksek türevin katsayılarında bağımlı değişken old. dan hemen hemen lineer değildir.

5) $x^2z_x+y^2z_y=(x+y)z$ denkleminin $\alpha(t)=(2t,t,1)$ eğrisinden geçen çözümü varsa bulunuz.

Denk genel çözümü yani karakteristik eğrileri bulunur

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2} \Rightarrow -\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}+c_1$$

$$u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1, \quad \frac{dx-dy}{x^2-y^2}=\frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{dx-dy}{\cancel{(x+y)}(x-y)}=\frac{dz}{\cancel{(x+y)}z}$$

$$\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dz}{z} \Rightarrow \ln(x-y)=\ln z+\ln c_2 \Rightarrow V=\frac{x-y}{z}=c_2$$

$x=2t,\ y=t,\ z=1$ old. $\frac{1}{t}-\frac{1}{2t}=c_1$, $\frac{2t-t}{1}=c_2 \Rightarrow c_2=t$

$$c_1=\frac{1}{2t} \Rightarrow c_1=\frac{1}{2c_2} \Rightarrow \boxed{2c_2c_1=1} \Rightarrow \boxed{2\,\frac{x-y}{z}\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=1}$$

③

b) $(2xyz + x^2\sin x)\, z_y + (x^2 z - y) z_x + 2xz^2 = -\sin x$

denk genel çözümü bulunuz.

$$\frac{dx}{x^2z - y} = \frac{dy}{2xyz + x^2\sin x} = \frac{dz}{-2xz^2 - \sin x} \qquad (*)$$

$u = x^2z + y = c_1 \Rightarrow d(x^2z+y) = 2xz\,dx + x^2dz + dy$

old. dan $(*)$ dan

$$\frac{2xz\,dx + x^2dz + dy}{\cancel{2x^3z^2} - \cancel{2xzy} - \cancel{2x^3z^2} - x^2\sin x + \cancel{2xyz} + x^2\sin x}$$

Payda sıfır old. dan

$2xz\,dx + x^2dz + dy = 0 \Rightarrow d(x^2z+y) = 0$

$u = x^2z + y = c_1$ bulunur.

$V = \cos x + yz = c_2 \Rightarrow d(\cos x + yz) = -\sin x\,dx + z\,dy + y\,dz$

olur. $*$ dan

$$\frac{-\sin x\,dx + z\,dy + y\,dz}{-(\sin x)\cdot x^2z + \cancel{y\sin x} + \cancel{2xyz^2} + x^2z\sin x - \cancel{2xyz^2} - \cancel{y\sin x}}$$

Payda sıfır old. dan

$-\sin x\,dx + z\,dy + y\,dz = 0 \Rightarrow d(\cos x + yz) = 0$

$V = \cos x + yz = c_2$ olur. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ old.

F keyf. fonk $F(x^2z+y,\ \cos x + yz) = 0$

genel çözüm bulunur.